

جمہندی تشریحی

فصل مثلثات دوازدهم

مہدی ساکریان

۰۹۰۱ ۴۲۵ ۳۰۵

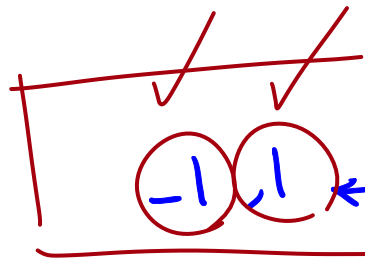


نیمال اول : ۵ غره
خرار : ۲ غره
شهرپوری : ۳ غره
مثلاث

نکته سبب امتحان ۱: دوره تناوب و $\frac{\max}{\min}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

دوره تناوب = T



min, max بخوانند

$$C = \frac{\max + \min}{2}$$

min, max بخوانند

$$a = \pm \frac{\max - \min}{2}$$

$$f(x) = a \sin bx + C$$

$$f(x) = a \cos bx + C$$

① دوره تناوب، مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = 1 + 2 \sin 7x$$

انگیزه، خرداد ۱۴۰۱

$$T = \frac{2\pi}{7} \quad \text{max}$$

$$y = 1 + 2(1) = 3 \quad y = 1 + 2(-1) = -1 \quad \text{min}$$

$$f(x) = \sqrt{3} - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

انگیزه، شهریور ۱۴۰۲ ✓

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$y = \sqrt{3} - (1) = \text{min}$$

$$y = \sqrt{3} - (-1) = \sqrt{3} + 1 = \text{max}$$

(۷) : یک تابع سینوسی بنویسید - دوره تناوب 1π و مقادیر $\min$ و $\max$ آن 5 و -1 باشد.

✓ الغزہ شهر دور ۱۴۰۰ ✓

$$y = a \sin bx + c$$

$$3 \sin \frac{1}{\epsilon} x + 2$$

$$1\pi = \frac{2\pi}{|b|} \longrightarrow |b| = \frac{1}{\epsilon}$$

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{5 + (-1)}{2} = 2$$

$$a = \frac{\max - \min}{2} = \frac{5 - (-1)}{2} = 3$$

مثال: دوره تناوب، ماکزیمم، مینیمم
 $y = 3 \cos \pi x + 2$
 ۱، ۵ غره شهرپور ۴.۱

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$y = 3(1) + 2 = 5 = \max$$

$$y = 3(-1) + 2 = -1 = \min$$

مثال: دوره تناوب، ماکزیمم، مینیمم
 $f(x) = \pi \cos\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}\right) - 3$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$$

$$y = \pi(1) - 3 = \max$$

$$y = \pi(-1) - 3 = \min$$

مثال: معادله یک تابع سینوسی $y = a \sin bx + c$ را بنویسید که بردار آن $[-4, 4]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.

انگزه خردار ۴.۱

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \quad \tau = \frac{2\pi}{|b|} \quad |b| = \pi$$

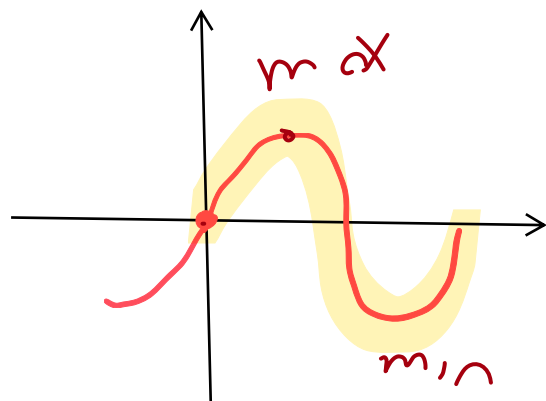
$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{4 + (-4)}{2} = 0$$

$$a = \pm \frac{\max - \min}{2} = \pm \frac{4 - (-4)}{2}$$

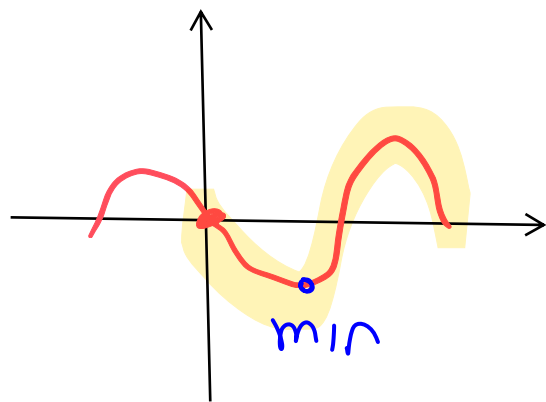
$\leftarrow a = \pm 4$

$$y = 4 \sin \pi x + 0$$

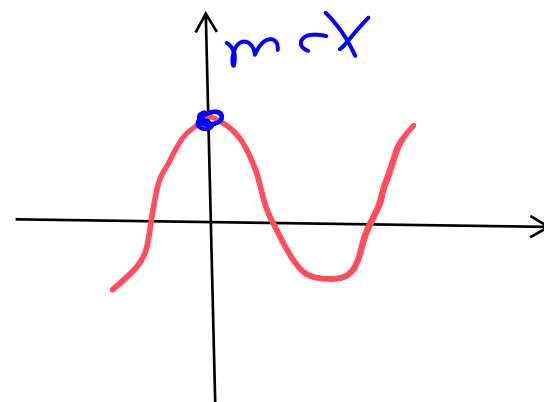
علامت یست



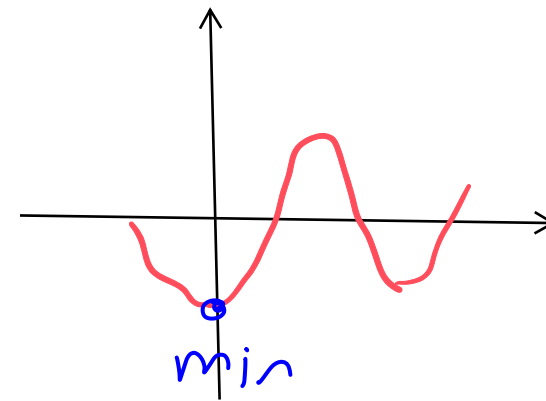
+ Sin
↓
max



- Sin
↓
min



+ Cos
↓
max



- Cos
↓
min

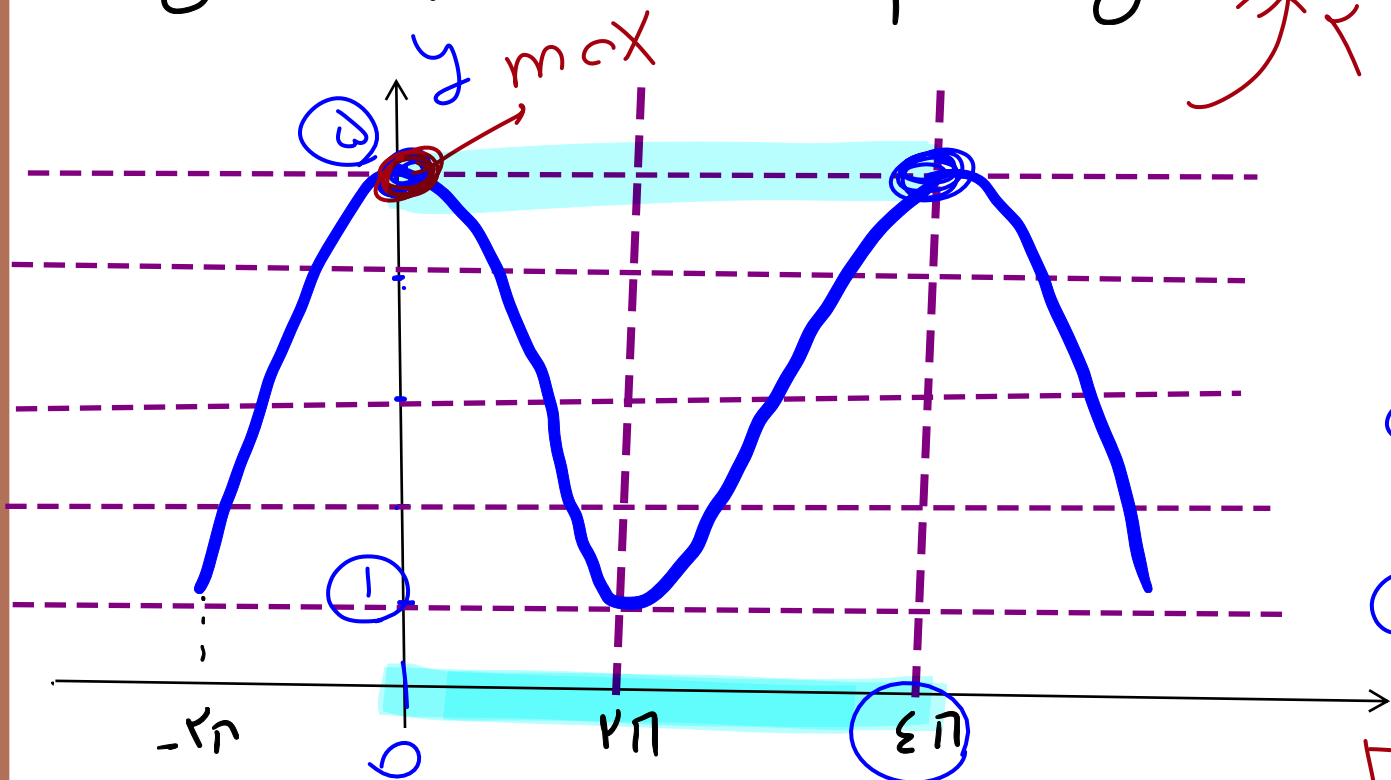
(۳) نمودار

رسم شدن است با تقریب به شکل

$$y = a \cos bx + c$$

ضابطه آن را مشخص کنید

۱ فروردین ۱۴۰۰



$$c = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$a = \pm \frac{5-(1)}{2} = \pm 2$$

$a = +2$ از max ε

حل: $\begin{cases} \text{max} = 5 \\ \text{min} = 1 \end{cases}$

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$|b| = \frac{1}{2}$$

max
min
T

$$y = a \sin bx + c$$

$$T = \frac{M - m}{b}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

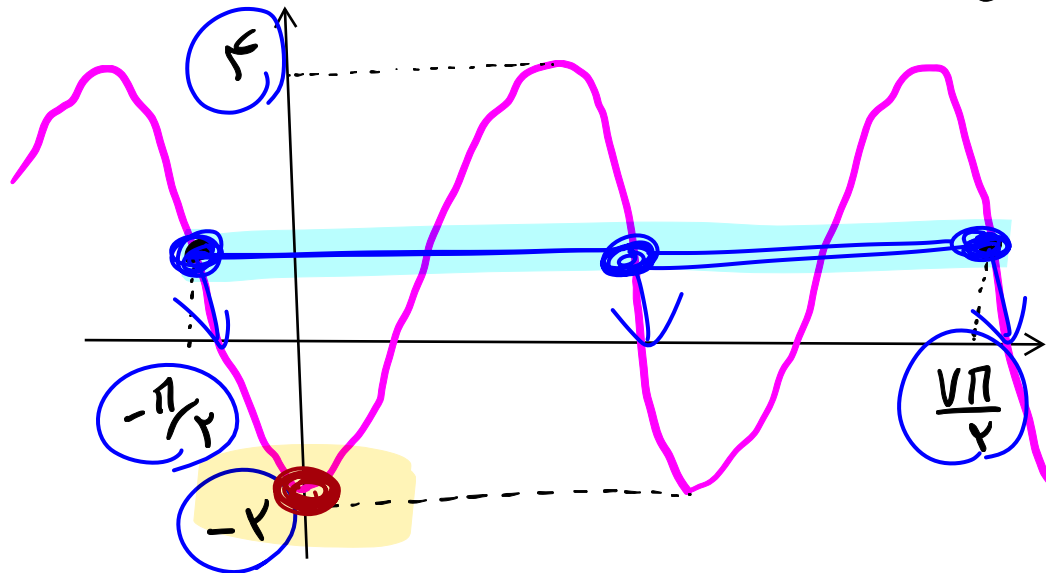
$$T = \frac{M + m}{b}$$

پ. a, b, c مع سہ معادلات $y = a \cos bx + c$

(۴) غلط

$$-3 \cos 1x + 1$$

1, 1.70 غلطی 1.1



نکات: فاصلہ 100 تا 100 بعدی $T =$

$$\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi = 2T$$

$$c = \frac{1 + (-1)}{2} = 1$$

$$T = \pi = \frac{\pi}{|b|}$$

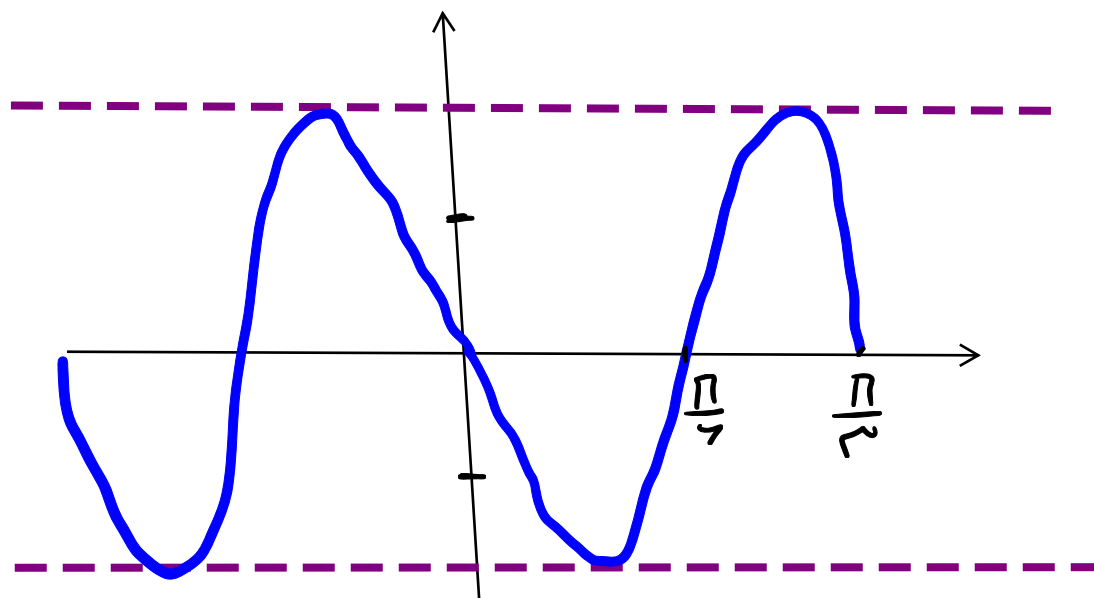
$$|b| = 1$$

$$a = \pm \frac{1 - (-1)}{2} = \pm 1 \xrightarrow{\text{min}} a = -3$$

$$f(x) = a \sin bx + c$$

بارفت در مقادیر ماکزیمم و مینیمم و
> دوره تناوب ضابطه تابع را بیابید.

۱۰ غره دی ۱۴۰۰ با تغییر



$$\left. \begin{array}{l} \text{max} = 2 \\ \text{min} = -2 \\ T = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

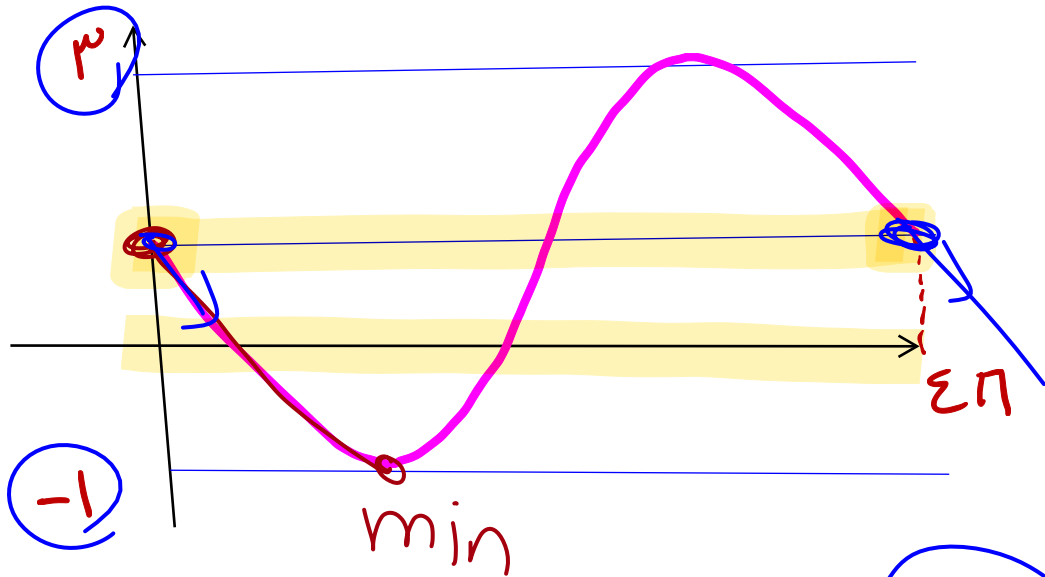
$$c = \frac{\text{max} + \text{min}}{2} = 0$$

$$a = \pm \frac{\text{max} - \text{min}}{2} = \pm 2 \xrightarrow{\text{غیردار چپ}} \boxed{a = -2}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{|b|} \quad |b| = 4$$

$$\Rightarrow y = a \sin bx + c \longrightarrow y = -2 \sin 4x + 0$$

(۵) خردار $y = a \sin bx + 1$ ✓
 ۱، ۲۵ اغزه خردار ۰.۲ ؟ ab



$$a = \pm \frac{M - m}{\epsilon} = \pm 2$$

$$\boxed{a = -2} \quad \text{min } \epsilon$$

$$ab = -2 \times \frac{1}{\epsilon} = -\frac{2}{\epsilon}$$

$$T = \epsilon \pi = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$\boxed{|b| = \frac{1}{\epsilon}}$$

$$T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f(x) = a \tan bx + c$$

$$f(x) = a \cot bx + c$$

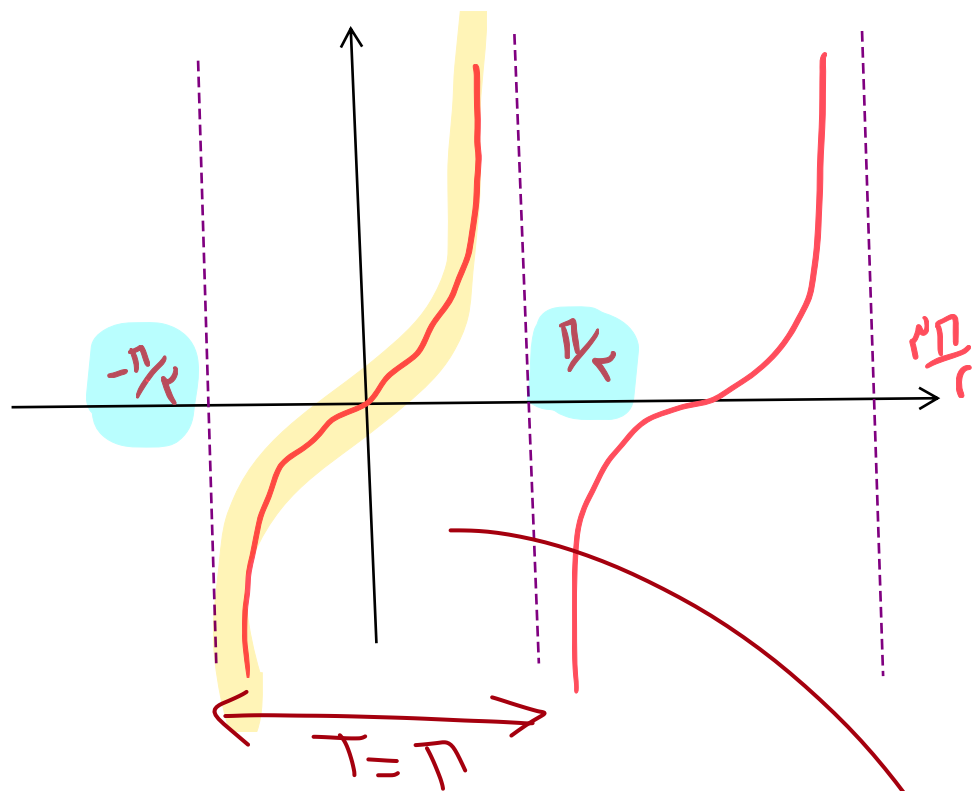
$$R = \text{بر } (-\infty, \infty)$$

در دامنه حذور (بازه ای که در آن تعریف شده است) $\tan x$ در آن صوری نباشد
 در یک دوره
 صوری است

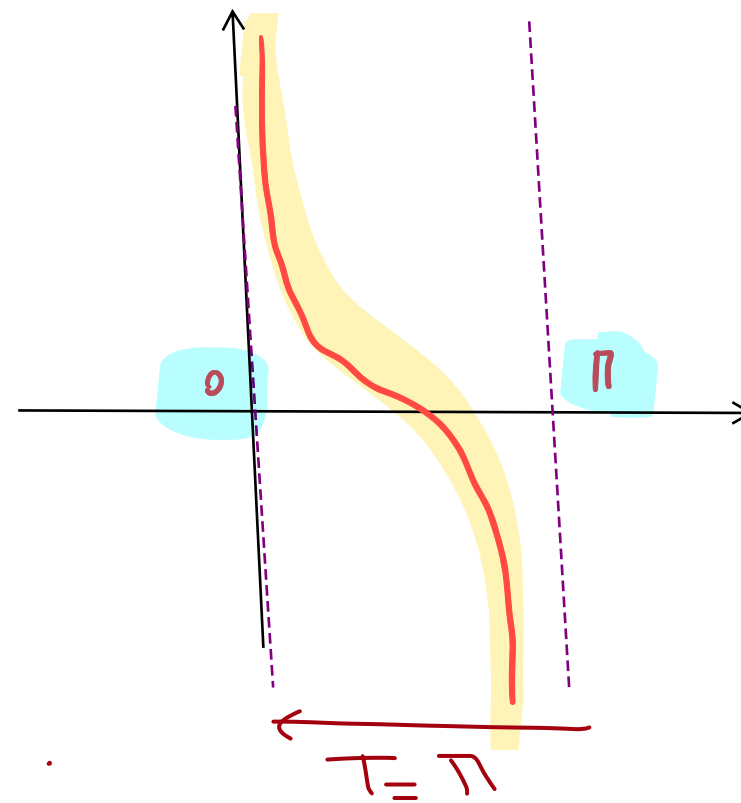
$$y = \tan x$$

$$y = \cot x$$

در دامنه حذور (بازه ای که در آن تعریف شده است) $\cot x$ در آن نزولی نباشد
 نزولی است



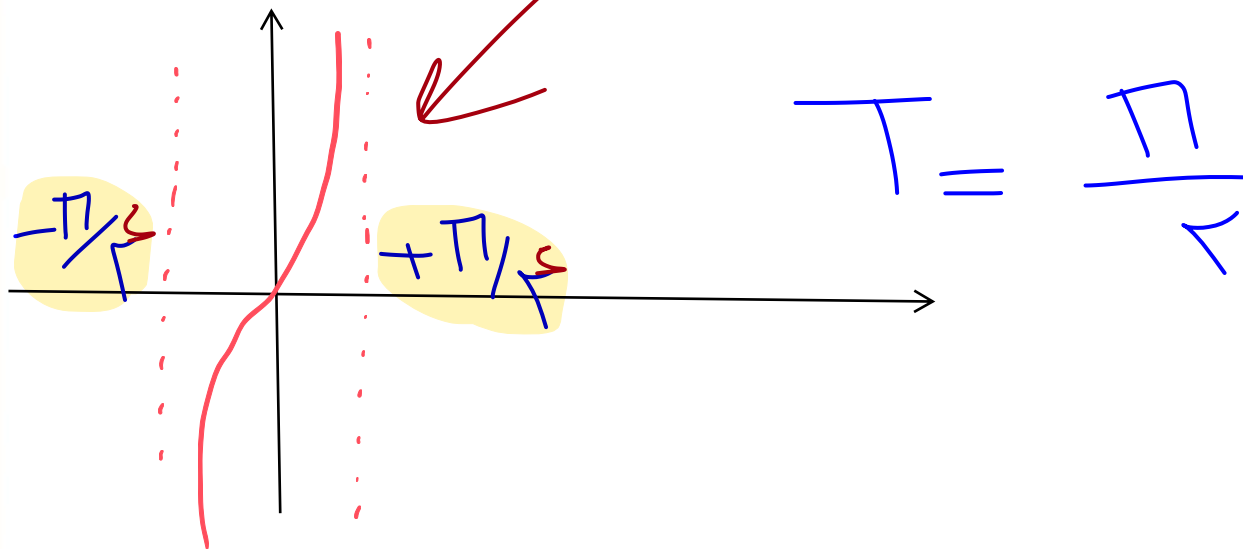
$$y = \tan x$$



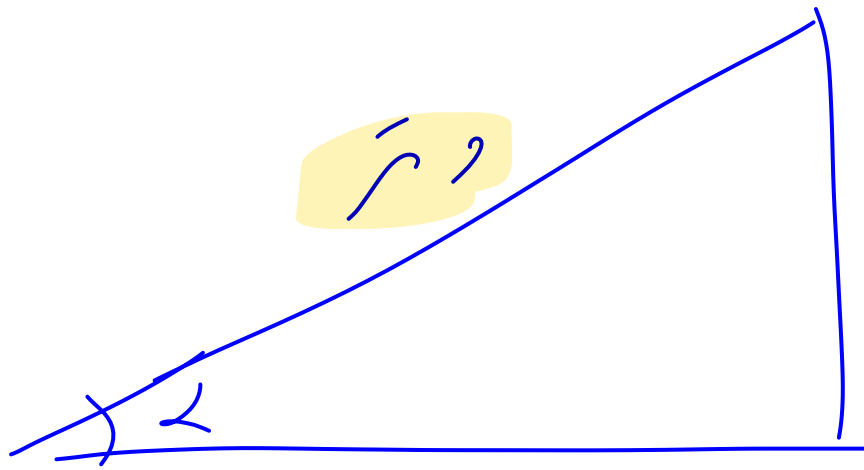
$$y = \cot x$$

✓ $\left. \begin{array}{l} \text{نہ گزرتا} \\ \text{نہ گزرتا} \end{array} \right\} \star$

(۴) تابع $f(x) = \tan x$ دارای دوره تناوب $\frac{\pi}{2}$ است و در بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ صعودی است.



دوره تناوب $y = \tan x$ برابر 2π است ۲۵. خرداد ۱۴۰۱ ← غلط زیرا π است.



ہیپٹنوس

(کلاسیک)
Sin

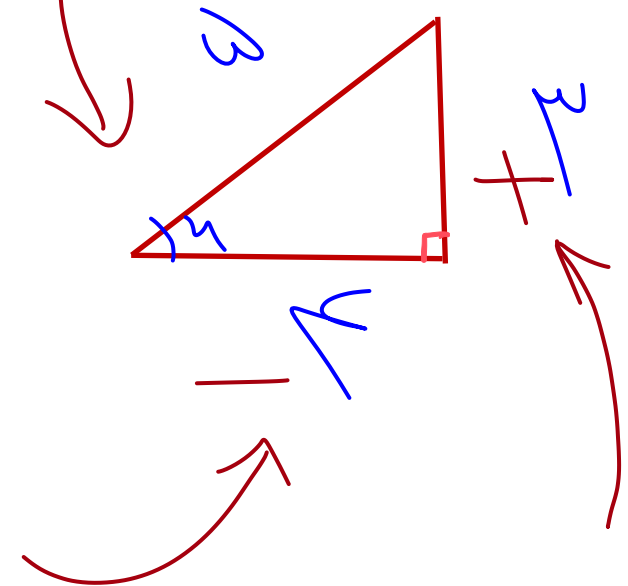
محاورہ

(کلاسیک)

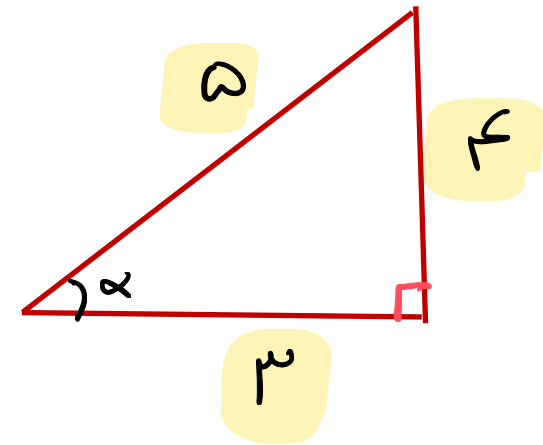
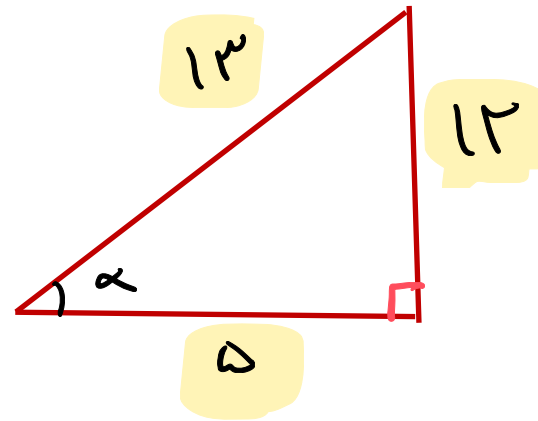
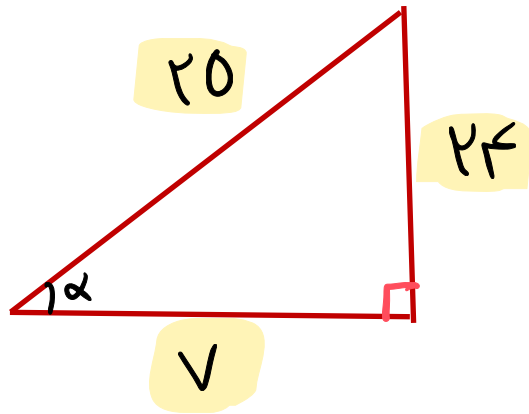
تبدیل نیست ← زاویه موقعه برابر هبدا است.

(۷) اگر $\sin x = \frac{3}{5}$ و x در ربع دوم باشد $\sim \tan x + \cos x + \cot x$ کدام است؟

$$\begin{aligned} & \frac{\text{مقابل}}{\text{جانب}} + \frac{\text{جانب}}{\text{وتر}} + \frac{\text{جانب}}{\text{مقابل}} \\ & \frac{3}{-4} + \frac{-4}{5} + \frac{-4}{3} \end{aligned}$$



اعداد فیثاغورسی



فرمول های ۲ن

$$\textcircled{1} \begin{cases} \cos 2x = \overbrace{\cos^2 x}^{\text{مربع}} - \overbrace{\sin^2 x}^{\text{مربع}} \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\textcircled{3} \tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} \sin 2x = 2 \sin x \cos x \\ \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin (2x) \\ (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x \\ (\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x \end{cases}$$

اگر $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ ، α حاده باشد حاصل $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha$ کدام است؟

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

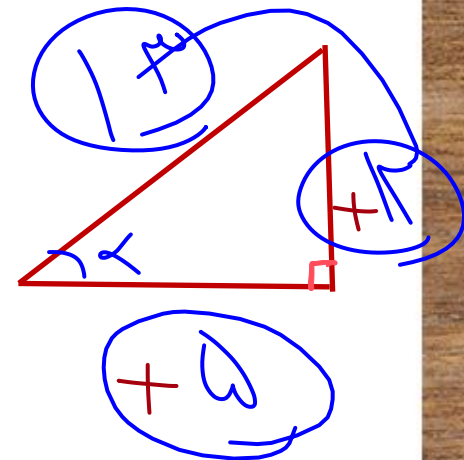
$$2\left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = \frac{-119}{169}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13}$$

ربع اول

$$\frac{-119}{169} + \frac{12}{13} \times \frac{10}{169}$$

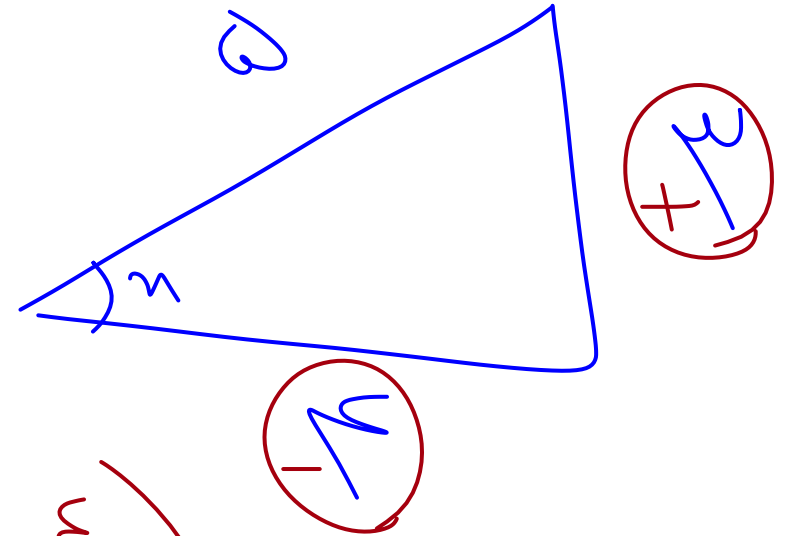


نکته: زاویه مقصود
 { برابر صبا ← مثلث
 > دبل صبا ← مثلث و فرمول > دبل

$$\text{Lorentz, } \tan u = \frac{\mu}{\varepsilon} \quad \mu$$

$$\sin u = \frac{\mu}{\delta} \quad \checkmark$$

$$\cos u = \frac{-\varepsilon}{\delta} \quad \checkmark$$



$$\sin \mu = \gamma \sin u \cos u = \gamma \left(\frac{\mu}{\delta} \right) \left(\frac{-\varepsilon}{\delta} \right)$$

(۹) حاصل $\sin x \cos x \cos 2x$ به ازاد $x = \frac{\pi}{2}$ را محاسبه کنید

اعزہ شہریدر ۱۴۰۰

$$\rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{\frac{1}{2}} \sin 2x = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\frac{\pi}{\lambda} = 22,0^\circ$$

$$\frac{\pi}{\lambda} = 10^\circ$$

یا فن نبره

$$\cos 2\pi = 2\cos^2 \pi - 1$$

$$\star \cos \pi = \frac{1 + \cos 2\pi}{2}$$

$$\cos 10 = \frac{1 + \cos 20}{2}$$

$$\cos 10 = \frac{1 + \sqrt{\frac{1 + \cos 20}{2}}}{2}$$

مثال : حالت ۱ بیابید (انرژی خردار ۱۰)

$$\cos 2\pi = 1 - 2\sin^2 \pi$$

$$\sin \pi = \frac{1 - \cos 2\pi}{2} \star$$

$$\sin \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1 - \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda}}{2}}}{2}$$

معادله مثلثاتی

شبیه سازی

جواب کلی

ساده سازی

~~$\sin \alpha = \sin \beta$~~

$$\alpha = \beta + 2k\pi$$

$$\alpha = \pi - \beta + 2k\pi$$

↓ ↓

(1, 20) (شماره 4.2)

(۱۰) معادله مثلثاتی $2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را حل کنید.

~~$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{2}$~~

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

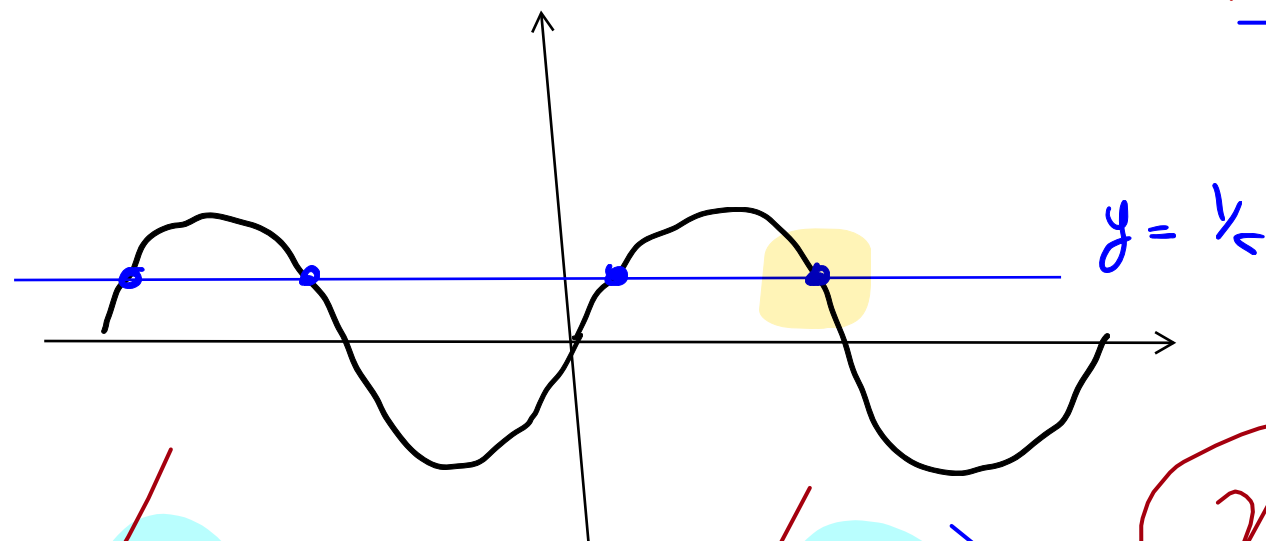
$$2x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + k\pi$$

نمودار $y = \sin x$ خط $y = \frac{1}{2}$ رسم شده است. طول نقاط

برخورد را بیا بینیم. (اموزه ۱۴.۱)



$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

☆ ☆
قطع
بدخورد
تلاقی
مباری بنزار

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

درست یا غلط: خط $y = \frac{1}{2}$ تابع $y = \sin x$ را در $[0, 2\pi]$ در یک نقطه قطع می‌کند.
(تمرین ۴.۲)
غلط به شکل بالاتر می‌بین!

اغزہ، غرار (ع. ۱)

فرا $\sin \tilde{x} = \sin x$ را حل کنید.

$$\sin \tilde{x} = \sin x \rightarrow \begin{aligned} \tilde{x} &= x + 2k\pi \\ \tilde{x} &= \pi - x + 2k\pi \end{aligned}$$

$$\tilde{x} = 2k\pi + 0$$

$$\tilde{x} = \pi + 2k\pi$$

$$\tilde{x} = \frac{2k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

اغزہ غرار (ع. ۱) خارج

فرا $\sin \tilde{x} = \sqrt{\frac{2}{2}}$ را حل کنید.

$$\sin \tilde{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sin \tilde{x} = \sin \frac{\pi}{4} \rightarrow \begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \tilde{x} &= \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{2k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \tilde{x} = \frac{2k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

معادله مثلثاتی	شب‌سازی	جواب کلی
ساده سازی	$\cos \alpha = \cos \beta$	$\alpha = \beta + 2k\pi$ $\alpha = -\beta + 2k\pi$

(۱) جواب کلی معادله مثلثاتی $2\cos^2 x - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ را بیابید.

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x = \frac{2\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x = -\frac{2\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right.$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{4} + k\pi$$

جوابهای معادله $\cos 2x - \cos x = 0$ را در بازه $(0, \pi)$ مشخص کنید.

(۷۵: ضرر ۲-۴)

$$\cos 2x = \cos x \rightarrow \begin{array}{l} 2x = x + 2k\pi \\ 2x = -x + 2k\pi \end{array} \quad \begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{array}$$

اگر k اعداد صحیح به هم جمع جوابها بدست میآید.

$$\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{array} \xrightarrow{k=0,1,2,\dots} \begin{array}{l} x=0, x=2\pi, \dots \\ x=0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi, \dots \end{array}$$

جوابهای در بازه $(0, \pi)$ فقط $\left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$ اند یعنی ۲ جواب داریم.

$$\sin \alpha = -\frac{1}{2} \longrightarrow \sin \alpha = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

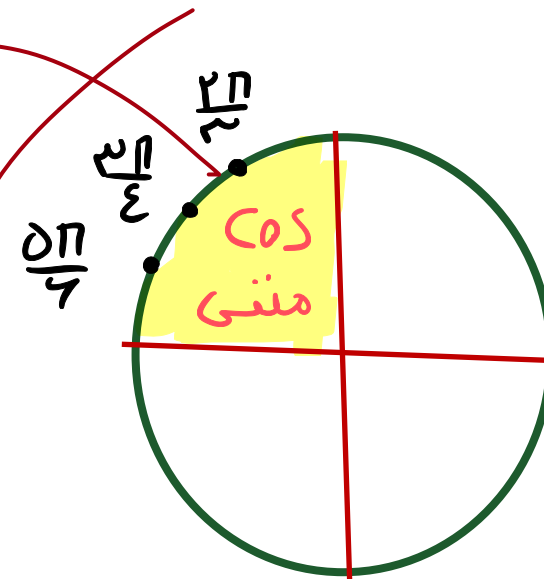
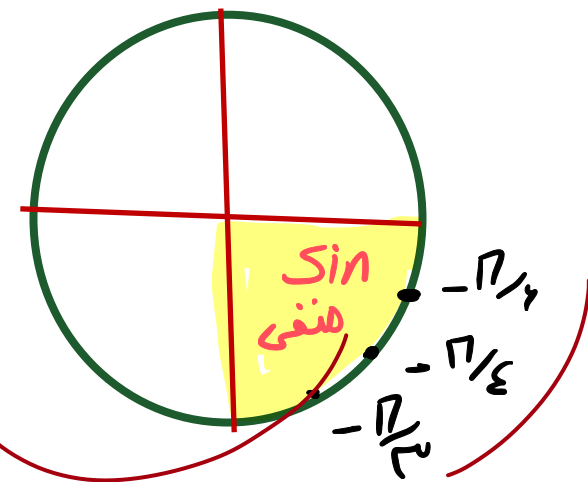
$$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \sin \alpha = \sin(-\frac{\pi}{4})$$

$$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \sin \alpha = \sin(-\frac{\pi}{3})$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2} \longrightarrow \cos \alpha = \cos(\frac{2\pi}{3})$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \cos \alpha = \cos(\frac{3\pi}{4})$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \cos \alpha = \cos(\frac{5\pi}{6})$$



$$\sin \alpha = -\sin \beta \longrightarrow \sin \alpha = \sin(-\beta)$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \longrightarrow \cos \alpha = \cos(\pi - \beta)$$

$$\cos \alpha = \sin \beta \longrightarrow \cos \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \beta)$$

$$-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$$

اعداد مرزی $\leftarrow$ ۰، ۱، -۱

$$\begin{cases} \sin \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 2k\pi + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = -1 \rightarrow \alpha = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \cos \alpha = -1 \rightarrow \alpha = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 0 \rightarrow \alpha = k\pi + 0 \\ \cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

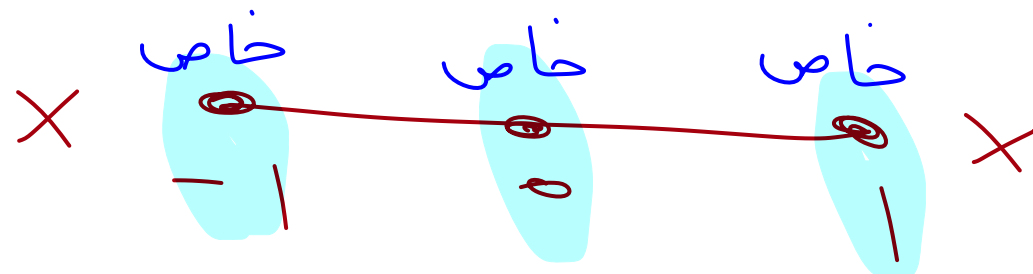
(۱۲) ضرب معادله مثلثاتی $\sin 2x + 3 \cos x = 0$ را بیا بید.

$$2 \sin x \cos x + 3 \cos x = 0 \quad (\cos x) (2 \sin x + 3) = 0$$

$$\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\cos x = -1, 0$$

و



$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

* * *

(1/0) غیر مورد است $\cos 2x - 3 \sin x + 4 = 0$ (۱۳) جواب معادله مثلثاتی

$$(1 - 2 \sin^2 x) - 3 \sin x + 4 = 0 \quad -2S^2 - 3S + 5 = 0$$

$\sin x = +1$ صوری $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ✓

$$\sin x = \frac{c}{a} = \frac{0}{-2} = -\frac{1}{2}$$

کلی

۱۵ فروردی ۱۴۰۰

(۱۴) جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$ بیابید.

$$(1 - 2\sin^2 x) - \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad -2S^2 - S + 1 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \begin{cases} a+c=b \\ x = -1 \end{cases} \quad x = -\frac{c}{a}$$

$$\boxed{\sin x = -1} \xrightarrow{\text{خاص}} x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$$

$$\boxed{\sin x = 1} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2K\pi \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = -\sin \beta \longrightarrow \sin(\alpha) = \sin(-\beta) \\ \cos \alpha = -\cos \beta \longrightarrow \cos \alpha = \cos(\pi - \beta) \end{array} \right.$$

نوع : منفی بیست

یا بیاید

$$\sin \alpha + \sin \omega x = 0$$

(10) جواب مدار

$$\sin \alpha = -\sin \omega x$$

$$\sin(\alpha) = \sin(-\omega x)$$

$$\alpha = -\omega x + 2k\pi$$

$$\alpha = \pi - (-\omega x) + 2k\pi$$

$$\alpha = 2k\pi \xrightarrow{\div 1} \alpha = \frac{2k\pi}{1}$$

$$-\alpha = \pi + 2k\pi \xrightarrow{\div -1} \alpha = -\frac{\pi}{1} - k\pi$$

۲ جزء

$$\sin \alpha = \cos \beta \quad \left. \begin{array}{l} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \beta \end{array}$$

نوع : لنگه به لنگه

مثال. جواب معادله $\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ که ام است ؟ (سه اسری ۹۹)

$$\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(-x + \frac{\pi}{4} \right) \xrightarrow{\text{حذف}}$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = -x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pi - \left(-x + \frac{\pi}{4} \right) + 2k\pi$$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{2k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$x = 2k\pi + \pi$$

Shakeryan.com



استاد مهدی شاکریان



Riazi_Jazb



Mehdi_Shakeryan

پشتیبانی: 051 - 38117

@Sebghat_Support

وقتسه عاشق ریاضی بشی !!!



استاد مهدی شاکریان

وقتسه عاشق ریاضی بشی

Mat

راه های ارتباطی
با
استاد شاکریان

 Shakeryan.com

پستیانی: 051 - 38117

 Sebghat_Support

